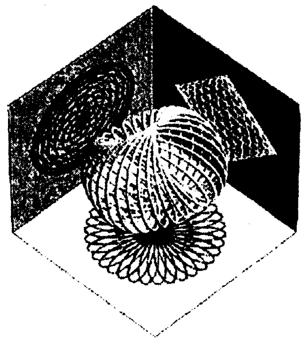
3次元人の4次元新賞味法 (準周期秩序の数理)

AUTHOR(S):
小川, 泰

数理解析研究所講究録
第 1725 巻 2011 年 35-40

3次元人の4次元新賞味法

小川　泰[1]



筆者の出自は物性・統計力学系の理論物理学であったが、1970 年頃から点や剛体球などの配置問題を中心とする幾何学に興味が移行してきた。ただし、『(数学としてではなく) 科学の立場での幾何学』といった方が適切であろう。別の言葉を使うならば、証明よりも事実を重んじて、観察や実験に基づいて記述、考察、推論を愉悦しむ。さらに、場合によっては、デザインや造形化に進む。

この立場で数理解析研「準周期系研究会」の外にも、形の科学会[2]と、Martin Gardner にちなんで隔年 Atlanta で開催される集会 Gathering for Gardner (G4Gn と略称, n は第 n 回を表す整数)などで発表してきた。

以下はそのまとめである。

§1.　はじめに

一般次元の正多胞体を考えると、正4面体のような単体と立方体的多胞体は任意次元のユークリッド空間に存在する。N 次元での単体の頂点数は N+1、同じく超立方体の頂点数は 2N である。 われわれが住む 3 次元では、(偶然というべきか) 単体と立方体の折り合いがよく、正四面体の 4 頂点は立方体の 8 頂点と一致させて内接させることができる。これは一般の次元で考えると、極めて特殊なことである。これらの頂点数が整数比になるのは N 次元単体の頂点数は$N+1$、N 次元立方体の頂点数は2^Nであるから、それらの比は$2^N/(N+1)$であり、整除可能な特殊次元は次表のようになる

表 1　特殊な次元での単体と「立方体」の頂点数の関係

整数	M	2	3	4	5
次元	$N = 2^M - 1$	3	7	15	31
単体頂点数	$N + 1$	4	8	16	32
超立方体帳点数	2^N	8	128	32768	2147483648
単体頂点数と超立方体帳点数の比	$2^N/(N+1)$	2	16	2048	67108864

---

[1]　筑波大学名誉教授。NPO 科学芸術学際研究所 (ISTA＝The Interdisciplinary Institute of Science, Technology and Art)。産業技術総合研究所客員研究員
Mail address: wt-ogawa@nifty.com

つまり、我々の３次元の後は7, 15,　31,...次元である。

§2.　次元固有の一様曲線

各次元ごとに固有の一様曲線が存在する。**1次元**は空間自身に等しく、直線自体。起点や終点が存在すればもはや一様ではない。**2次元**は任意の円。大きさや位置は任意。**3次元**は蔓巻線。時間をパラメータとして曲線を表す運動のイメージが便利である。そうすると、２次元は等速円運動。３次元は円運動しながら第３の方向に一定の速さで伸びる蔓巻運動に相当する。円運動も直線運動も独立に任意に選んでいい。

さて、**4次元**では？　というのがソモソモの発想であった。すぐわかることは円運動二つの合成である。それぞれの円運動を選ぶ自由度もあるだろうが、私の立場は冒頭に述べたように、直観的理解や造形の愉悦が重要要素である。実際に採用した思考過程に従って以下に記述する。

４次元を互いに独立な二つの２次元空間の直積とし、それぞれに円運動を想定するが、を$(X,\ Y,\ Z,\ W)=(\cos(pt),\ \sin(pt),\ \cos(qt),\ \sin(qt))$としておく。不必要に一般化せずに、円運動の半径は揃え、初期位相も簡単にしておく。周期比閉曲も線となるように簡単な整数比を採用する。４次元一様運動自体の説明はこれで十分。次に３次元空間に「翻案」して、３次元人としての賞味法を導入する。

§3.　３次元人の「特典」を利用して満喫

§1 で述べた次元間の特殊な関係を利用してこの４次元曲線を３次元曲線に特殊写像する。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(pt)+\sin(pt)-\cos(qt)-\sin(qt) \\ \cos(pt)-\sin(pt)+\cos(qt)-\sin(qt) \\ \cos(pt)-\sin(pt)-\cos(qt)+\sin(qt) \end{pmatrix}$$

に対して、$(p,\ q)$を Fibonacci 列に沿って、$\{(2,\ 3),(3,\ 5),(5,\ 8),(8,13),\ldots\}$のようにとって、収束具合を観察する。 Mathematica によるグラフィックスを利用したので視点位置は､その①default 値すなわち$\{1.3,\ -2.4,\ 2\}$,　②x軸方向 3. 38 の距離、　③y軸方向 3. 38 の距離、④z軸方向 3. 38 の距離の順で次ページの表 I に示す。(3. 38 は default 視点の直線距離)

やがて、この曲線群が同一曲面上にあることに気づく。その曲面の方程式は曲線の方程式でパラメータを書き換えた次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathrm{u})+\sin(u)-\cos(v)-\sin(v) \\ \cos(u)-\sin(u)+\cos(v)-\sin(v) \\ \cos(u)-\sin(u)-\cos(v)+\sin(v) \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} 0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le 2\pi \end{matrix}$$

この曲面を次頁に図示するが、別の視点で考えると「離心率$1/\sqrt{2}$の水平楕円が、長軸の向きと水平を保ちながら鉛直面内で合同な楕円運動したときの軌跡」である。イメージとして観覧車（Ferris wheel）に喩えれば、そのゴンドラの水平断面も運動軌跡も合同な楕円と

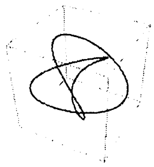
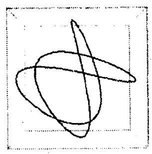
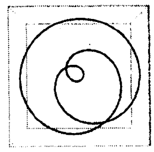
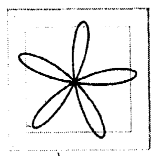
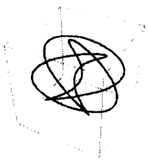
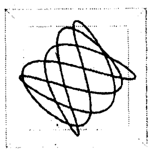
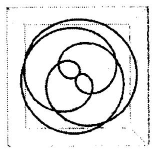
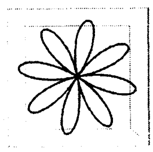
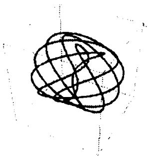
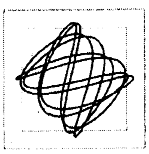
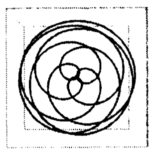
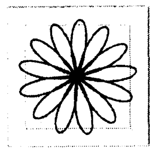
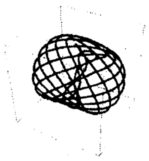
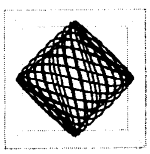
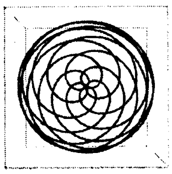
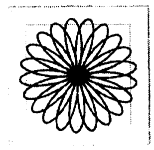
いう仮想観覧車ということになる。一葉双曲面や螺旋面のような線織面に対していわば円織面がありえ、さらに楕円織面という表現も成立しえよう。

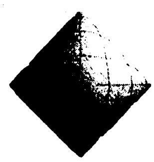
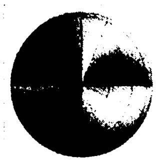
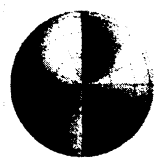
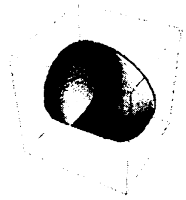
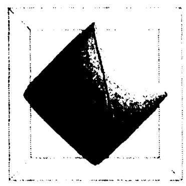
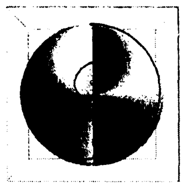
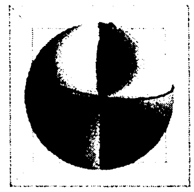
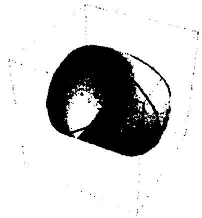
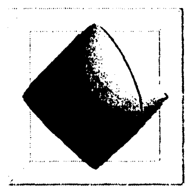
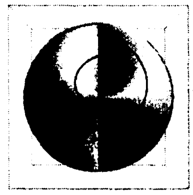
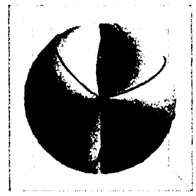
§3. 4. 曲面にとっての曲線は？

この曲面と曲線を別々に、および曲面と曲線を一緒にしたものを積層造形で作成した。素手の感触を伴う「観察」でつぎの「所見」を得た。

その軌跡としてできる立体は、対称面５枚あり（円形のものが２、互いに接触している合同な楕円が２、＋形（あるいは×形）のものが１である）。つまり、さきの表式で採用した座標系で表現すれば、$x = 0$の対称面が＋形（あるいは×形）に相当する。動点にとってそこは、いわば関所の役割を果たしており、軌道はそこで区切ることができる。その観点で観察すると、軌道は曲面の測地線になっているようである。この曲面上という束縛条件下での自由粒子運動を解くという解析力学問題として考察中であるが、事情があって間に合わなかったので次回研究会までの宿題とさせて頂きたい。

今述べたこの問題以外にも、一連の発想全体に渡って拡張可能な事柄が多数あると思っている。

{p, q}	視点①	視点②	視点③	視点④
{2, 3}				
{3, 5}				
{5, 8}				
{8, 13}				

曲面				
曲面 と 曲線 {2, 3}				
曲面 と 曲線 {3, 5}				

参考文献

小川泰　「高次元幾何学の直観的理解はどこまで可能か？」　形の科学会誌 20(2) 175-176 (2005)

小川泰　「４次元と３次元の新しい関連づけ」　形の科学会誌 21(2) 220-221 (2006)

小川泰　「"一様な" 空間閉曲線と元デザイン　形の科学会誌 22(2) 201-202 (2007)

小川泰, 吉野隆, 手嶋吉法　「空間曲線の太さ、立体曲面の厚みについて」　形の科学会誌 23(1) 15-16 (2008)

小川泰　「曲線群を測地線とする曲面とそれらの積層造形」　形の科学会誌 24(1)45-46(2009)

小川泰　「立体幾何学と解析幾何学」形の科学会誌 24(1)45-46(2009)

T. Ogawa, "A Family of Closed Space Curves, and a Closed face that the Curves are on", Symmetry: Art and Science, 2009/1~4, p.192-195 (2009)

T. Ogawa, T. Yoshino, and Y. Teshima; "A New Type of Transformation from 4D to 3D and Some 3D Designs" Presented at G4G8 (= Gathering for M. Gardner 8th) held in Atlanta, 2008 and in CD-ROM of its Proceedings published in 2010.

Y. Teshima and T. Ogawa "Loci of Circular Movement of Circle and and their Layered Manufacturing Model", Symmetry Art and Science, Austria, 2010.

Some Papers by Tohru OGAWA (Mail address: wt-ogawa.nifty.com)

1) *Geometrical Considerations on Hard Core Problems*

Tohru Ogawa and Masaharu Tanemura Prog. Theor. Phys. Vol. 51 No. 2 (1974) pp. 399-417

A new formulation called stochastic geometry is proposed for hard core problems, in which short range correlations geometrically brought on because of the volume exclusion effect of the hard cores play a major role, and the system is described in terms of properly defined contiguous pair distribution functions (CPDF). A homogeneous integral equation for the CPDF is derived as the condition of stationary Markoff process. Application of this formulation to the hard disk system leads to a solution in a form of high density expansion without the assumption of the crystalline long range order. The equation of states, entropy and contiguous distribution functions are obtained. The pressure thus obtained is somewhat higher than the generally accepted values for the solid phase, and the entropy is larger. The possibility of disappearance of hard disk transition is discussed. Furthermore the possible differences of the melting transition due to the dimensionality are discussed through geometrical consideration.

2) Problems in a Digital Description of a Configuration of Atoms and Some Other Geometrical Topics in Physics

The original paper was published in Topological Disorder in Condensed Matter. Eds. F. Yonezawa and T. Ninomiya, (Springer Verlag, 1983) (Springer Series in Solid-State Sciences 46) p.60-77.

(Any body can read it in the following website)

http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ogawa/chains.htm

3) On the Structure of a Quasicrystal – Three-Dimensional Penrose Transformation

Tohru Ogawa; Journal of Physical Society of Japan, 34,3205-3208 (1985)

http://jpsj.ipap.jp/link?JPSJ/54/3205/

4) AN ESSENTIALLY-THREE-DIMENSIONAL QUASICRYSTAL

"Science on Form" (Proceedings of the First International Symposium for Science on Form) , **P.479-489,** KTK Scientific Publishers/Tokyo, 1986).

(Any body can read it in the following website)

http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ogawa/es.htm

5) SYMMETRY OF THREE-DIMENSIONAL QUASICRYSTALS

Tohru Ogawa Material Science Forum Vol.22-24 (1987) pp.187-200.

(Any body can read it in the following websites)

http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ogawa/3d.htm

http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ogawa/3da.htm

http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ogawa/ap.htm

http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ogawa/re.htm

6) Frustration, Degeneracy and Forms: A View of the Antiferromagnetic Ising Model on a Triangular Lattice

The original paper was published in Progress of theoretical physics. Supplement (87), 90-101.

(Any body can read it in the following website)

http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ogawa1/forms.htm

7) Chains, Flowers, Rings and Peanuts: Graphical Geodesic Lines and Their Application to Penrose Tiling

Quasicrystals (Proceedings of the 12th Taniguchi Symposium, Shim, Mie Prefecture, Japan, 14-19, November,1989) (Eds. T.Fujiwara and T. Ogawa) (Springer Series in Solid State Sciences 93) p.14~19 (1990).

(Any body can read it in the following website)

http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ogawa/es.htm

8) One-Dimensional Quasicrysals and Democracy

T. Ogawa and T. Ogawa; in Quasicrystals (Proceedings of China-Japan Seminar) Eds. K. H. Quo and T. Ninomiya (1991, World Scientific) pp.394-401.

9) Graphical Geodesic Lined applied for Graohical Geodesic Lines applied for some Quasiperiodic Tiling

The original paper was published in *Proceedings of the 6th International Conference on Quasicrystals* (Eds.: S. Takeuchi and T. Fujiwara, World Scientific, 1998).

(Any body can read it in the following website)

http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ogawa1/dig.htm

10) Proportional Representation System as Generalized Crystallography and Science on Form, Tohru Ogawa and Taeko Ogawa; Structural Chemistry Structural Chemistry, Volume 13, Numbers 3-4, 297-304, (special issue dedicated to Prof. Alan Mackay).

One can download at

http://www.springerlink.com/content/grct0jrl1cc6f56h/